

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН В НАНОКОМПОЗИТАХ НА ОСНОВЕ МАГНИТНЫХ НАНОПРОВОЛОК

Аннотация. *Актуальность и цели.* Магнитные нанокomпозиты обладают большим разнообразием физических свойств и значительно отличаются от свойств массивного материала. Физические свойства нанокomпозитов зависят от многих факторов: химического состава, методов синтеза, размера и формы магнитных включений, взаимодействия частиц с соседними частицами и окружающей их матрицей. Значительный интерес проявляется к магнитным нанопроволокам, получаемым на основе матрицы мезопористого оксида алюминия. Мезопористый оксид алюминия, полученный анодным окислением алюминия, уникален тем, что в процессе его получения можно контролировать основные наноструктурные параметры: диаметры цилиндрических пор и расстояние между центрами соседних пор. Одним из методов получения магнитных нанокomпозитов в матрице оксида алюминия является электрохимическое осаждение в поры магнитных металлов, которое позволяет контролировать количество осажденного металла, варьировать длину получаемых нанопроволок и их ориентацию относительно подложки. Целью работы является разработка математической модели распространения электромагнитных волн в наноструктурированных материалах на основе магнитных нанопроволок. *Материалы и методы.* Разработана декомпозиционная математическая модель распространения электромагнитных волн в наноструктурированных композитах на основе магнитных нанопроволок. Сформулированы уравнения электродинамики для магнитных частиц с учетом поля обменного взаимодействия. Получена матрица проводимости для автономного блока в виде прямоугольного параллелепипеда с включением в виде магнитной нанопроволоки. Даны рекомендации по использованию автономного блока для решения прикладных задач электродинамики и техники сверхвысоких частот (СВЧ). *Результаты.* Автономный блок в виде прямоугольного параллелепипеда с включением в виде магнитной нанопроволоки является универсальным базовым элементом для решения прикладных задач электродинамики и техники СВЧ. Автономный блок может использоваться для определения постоянных распространения волн в трехмерных периодических структурах из магнитных нанопроволок. Ячейка периодической структуры моделируется автономным блоком. Накладывая на грани параллелепипеда краевые условия, вытекающие из теоремы Флоке, получаем характеристическое уравнение относительно постоянных распространения волн. Из решения характеристического уравнения определяются основные типы волны, которые могут использоваться для определения эффективных значений магнитной и диэлектрической проницаемостей магнитного нанокomпозита. Постоянные распространения волн левой и правой поляризации, обыкновенной и необыкновенной волн в бесконечной сплошной гиромангнитной среде должны совпадать с аналогичными значениями постоянных распространения волн в трехмерной периодической структуре магнитного нанокomпозита. Это приводит к системе уравнений, из которой определяются компоненты эффективного тензора магнитной проницаемости и скаляр диэлектрической проницаемости. *Выводы.* Автономный блок может непосредственно использоваться как базовый элемент при построении математических моделей устройств СВЧ с магнитными нанокomпозитами (циркуляторы, перестраиваемые фильтры и т.д.). Области вкладки, подложек устройств СВЧ из магнитных нанокomпозитов дополнительно

разбиваются на автономные блоки. Математическая модель в этом случае является моделью высокого уровня и позволяет учитывать влияние поля обменного взаимодействия на предельные характеристики устройств СВЧ.

Ключевые слова: магнитные нанопроволоки, уравнения Максвелла, уравнения Ландау – Лифшица, декомпозиционный подход, автономный блок, матрица проводимости.

A. S. Nikolenko

MATHEMATICAL MODEL OF ELECTROMAGNETIC WAVE PROPAGATION IN NANOCOMPOSITES BASED ON MAGNETIC NANOWIRES

Abstract. *Background.* Magnetic nanocomposites possess a big variety of physical properties and considerably differ from properties of a massive material. Physical properties of nanocomposites depend on many factors: chemical composition, methods of synthesis, the size and form of magnetic inclusions, interactions of particles with adjacent particles and a matrix surrounding them. Of considerable interest are magnetic nanowires, received on the basis of the matrix of mesoporous oxide of aluminum. The mesoporous oxide of aluminum, received by anode oxidation of aluminum, is unique by the fact that in the course of its receiving it is possible to supervise the key nanostructural parameters: diameters of cylindrical pores and distance between the centers of adjacent pores. One of methods of receiving magnetic nanocomposites in a matrix of aluminum oxide is electrochemical deposition into the pores of magnetic metals which allows supervising the amount of the deposited metal, varying the length of the received nanowires and their orientation in relation to a substrate. The purpose of the work is to develop a mathematical model of distribution of electromagnetic waves in the nanostructured materials on the basis of magnetic nanowires. *Materials and methods.* The author developed a decomposition mathematical model of electromagnetic wave propagation in nanostructured composites based on magnetic nanowires and formulated an equation of electrodynamics for the magnetic particles taking into account the field of exchange interaction. The researcher also obtained the linear conductance matrix for the autonomous unit in the form of a rectangular parallelepiped with inclusion of a magnetic nanowire and gave recommendations for the use of the autonomous unit to solve the applied problems of electrodynamics and ultrahigh frequency technology (UHF). *Results.* The autonomous unit in the form of a rectangular parallelepiped with inclusion of a magnetic nanowire is a universal basic element for the solution of applied problems of electrodynamics and ultrahigh frequency technology. The autonomous unit can be used for definition of constants of distribution of waves in three-dimensional periodic structures from magnetic nanowires. The cell of the periodic structure is modelled by the autonomous unit. By imposing boundary conditions following from the Floquet theorem on the edges of a parallelepiped, the researcher received the characteristic equation concerning constants of distribution of waves. From the solution of the characteristic equation the author defined the main types of waves which can be used for determination of effective values of magnetic and dielectric conductivity of a magnetic nanocomposite. Continuous distributions of waves of the left and right polarization, ordinary and unusual waves in the infinite continuous gyromagnetic environment have to coincide with similar values of constants of distribution of waves in three-dimensional periodic structures of a magnetic nanocomposite. It leads to the system of equations from which it is possible to define the components of an effective tensor of magnetic permeability and a scalar of dielectric permeability. *Conclusions.* The autonomous unit can be directly used as a basic element in creation of mathematical models of

microwave devices with magnetic nanocomposites (circulators, reconstructed filters, etc.). The areas of inserts, substrates of microwave devices from magnetic nanocomposites in addition are to be divided into autonomous units. The mathematical model in this case is a model of high level and allows considering the influence of the field of exchange interaction on the limit characteristics of microwave devices.

Key words: magnetic nanowires, Maxwell's equations, Landau-Lifshitz decomposition approach, autonomous unit, matrix conductivity

Введение

Магнитные нанокompозиты обладают большим разнообразием физических свойств и значительно отличаются от свойств массивного материала. Физические свойства нанокompозитов зависят от многих факторов: химического состава, методов синтеза, размера и формы магнитных включений, взаимодействия частиц с соседними частицами и окружающей их матрицей. Значительный интерес проявляется к магнитным нанопроволокам, получаемым на основе матрицы мезопористого оксида алюминия [1]. Мезопористый оксид алюминия, полученный анодным окислением алюминия, уникален тем, что в процессе его получения можно контролировать основные наноструктурные параметры: диаметры цилиндрических пор и расстояние между центрами соседних пор. Одним из методов получения магнитных нанокompозитов в матрице оксида алюминия является электрохимическое осаждение в поры магнитных металлов [1], которое позволяет контролировать количество осажденного металла, варьировать длину получаемых нанопроволок и их ориентацию относительно подложки. Несмотря на значительные успехи в технологии изготовления магнитных нанопроволок их электродинамические свойства исследованы слабо. Это является определенным тормозом использования нанокompозитов на основе магнитных нанопроволок в устройствах сверхвысоких частот (СВЧ) – циркуляторы, перестраиваемые фильтры и т.д.

Целью работы является разработка математической модели распространения электромагнитных волн в наноструктурированных материалах на основе магнитных нанопроволок.

1. Уравнения электродинамики для магнитных наночастиц

Система дифференциальных уравнений электродинамики для анализа магнитных наночастиц состоит из уравнений Максвелла и уравнения движения намагниченности [2]:

$$\left\{ \begin{array}{l} \operatorname{rot} H(t) = \epsilon \frac{\partial \vec{E}(t)}{\partial t} + \sigma \vec{E}(t); \\ \operatorname{rot} E(t) = -\frac{\partial \vec{B}(t)}{\partial t}; \\ \vec{B}(t) = \vec{M}(t) + \mu_0 \vec{H}(t); \\ \frac{d\vec{M}(t)}{dt} = -\gamma(\vec{M}(t) \times \vec{H}_{\text{эф}}(t)) + \omega_r(\chi_0 \vec{H}_{\text{эф}}(t) - \vec{M}(t)); \\ \vec{H}_{\text{эф}}(t) = \vec{H}(t) + \vec{H}_q(t); \\ \mu_0 \vec{H}_q(t) = q \nabla^2 \vec{M}(t), \end{array} \right. \quad (1)$$

где $\vec{E}(t)$, $\vec{H}(t)$ – векторы напряженности электрического и магнитного полей; $\vec{M}(t)$ – вектор намагниченности среды; $\vec{B}(t)$ – вектор магнитной индукции; $\vec{H}_{\text{эф}}(t)$ – суммарное эффективное магнитное поле, действующее на магнитный момент частицы; $\vec{H}_q(t)$ – эффективное магнитное поле обменного взаимодействия; ∇ – оператор Лапласа; ε – диэлектрическая проницаемость; σ – электропроводность среды; μ_0 – электрическая и магнитная постоянные; γ – гиромагнитное отношение; $\omega_r = \alpha\gamma H_0$ – частота релаксации; α – магнитные потери; $\chi_0 = M_0 / H_0$ – статическая восприимчивость; q – константа обменного взаимодействия. Особенностью уравнений электродинамики (1) является то, что в уравнении движения намагниченности учитывается поле обменного взаимодействия – магнитные частицы имеют размеры порядка 10–80 нм.

Используя формулы векторного анализа, преобразуем уравнения движения намагниченности в (1) к форме, удобной для последующего применения проекционного метода [3]:

$$\begin{cases} \text{rot } \vec{H}(t) = \varepsilon \frac{\partial \vec{E}(t)}{\partial t} + \sigma \vec{E}(t); \\ \text{rot } \vec{E}(t) = -\frac{\partial}{\partial t} (\vec{M}(t) + \mu_0 \vec{H}(t)); \\ \frac{d\vec{M}(t)}{dt} = -\gamma (\vec{M}(t) \times (\vec{H}(t) + \vec{H}_q(t))) + \omega_r (\chi_0 (\vec{H}(t) + \vec{H}_q(t)) - \vec{M}(t)); \\ \mu_0 \vec{H}_q(t) = q \text{grad div } \vec{M}(t) - q \text{rot rot } \vec{M}(t). \end{cases} \quad (2)$$

Для гармонических колебаний справедливо

$$\begin{aligned} \vec{H}(t) &= \vec{H}_0 + \vec{H} \exp(i\omega t), \quad \vec{M}(t) = \vec{M}_0 + \vec{M} \exp(i\omega t), \\ \vec{E}(t) &= \vec{E} \exp(i\omega t), \quad \vec{H}_q(t) = \vec{H}_q \exp(i\omega t), \end{aligned} \quad (3)$$

где $\vec{H}_0$ – постоянное магнитное поле в среде наночастицы; $\vec{M}_0$ – постоянная намагниченность в среде наночастицы, система уравнений (2) имеет следующий вид:

$$\begin{cases} \text{rot } \vec{H} = i\omega \varepsilon \vec{E}; \\ \text{rot } \vec{E} = -i\omega \vec{M} - i\omega \mu_0 \vec{H}; \\ (\omega_r + i\omega) \vec{M} - \omega_r \chi_0 (\vec{H} + \vec{H}_q) + \gamma (\vec{M}_0 \times (\vec{H} + \vec{H}_q) + \vec{M} \times \vec{H}_0) = 0; \\ \mu_0 \vec{H}_q = q \text{grad div } \vec{M} - q \text{rot rot } \vec{M}, \end{cases} \quad (4)$$

где $\varepsilon_{\text{мнч}} = \varepsilon - i \frac{\sigma}{\omega}$.

Пусть постоянное магнитное поле $\vec{H}_0 = H_{0x} \vec{i} + H_{0y} \vec{j} + H_{0z} \vec{k}$ и намагниченность $\vec{M}_0 = M_{0x} \vec{i} + M_{0y} \vec{j} + M_{0z} \vec{k}$ в среде наночастицы являются

однородными, т.е. не зависят от координат, тогда третье уравнение (4) можно записать в тензорной форме:

$$\vec{H} + \vec{H}_q = \tilde{\eta} \vec{M}, \quad (5)$$

где

$$\tilde{\eta} = \mu_0^{-1} \begin{pmatrix} \omega_r \chi_0 & \gamma M_{0z} & -\gamma M_{0y} \\ -\gamma M_{0z} & \omega_r \chi_0 & \gamma M_{0x} \\ \gamma M_{0y} & -\gamma M_{0x} & \omega_r \chi_0 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} i\omega + \omega_r & -\gamma H_{0z} & \gamma H_{0y} \\ \gamma H_{0z} & i\omega + \omega_r & -\gamma H_{0x} \\ -\gamma H_{0y} & \gamma H_{0x} & i\omega + \omega_r \end{pmatrix} -$$

тензор.

Здесь $\gamma = -2,21 \cdot 10^5 (\text{А/м})^{-1} \text{с}^{-1}$ – гиромагнитное отношение; $\chi_0 = M_0 / H_0$ – статическая восприимчивость; $\omega_r = \alpha \gamma H_0$ – частота релаксации; α – магнитные потери.

Подставляя (5) в (4) и исключая $\vec{H}_q$, получаем систему уравнений электродинамики для сред магнитных наночастиц:

$$\begin{cases} \text{rot } \vec{H} = i\omega \epsilon_{\text{мнч}} \vec{E}; \\ \text{rot } \vec{E} = -i\omega \vec{M} - i\omega \mu_0 \vec{H}; \\ q \text{ rot rot } \vec{M} - q \text{ grad div } \vec{M} = \mu_0 \vec{H} - \mu_0 \tilde{\eta} \vec{M}. \end{cases} \quad (6)$$

2. Матрица проводимости автономного блока в виде прямоугольного параллелепипеда с магнитными нанопроволоками

Магнитный нанокompозит на основе магнитных нанопроволок рассматриваем как периодическую 3D-структуру (рис. 1,а). Ячейка периодической 3D-структуры (рис. 1,б) разбивается на автономные блоки двух видов (рис. 1,в). Автономный блок 3 (без магнитной нанопроволоки) является частным случаем автономного блока 2. Построим вычислительный алгоритм определения матрицы проводимости автономного блока 2 в виде прямоугольного параллелепипеда с магнитной нанопроволокой (рис. 2).

Запишем систему уравнений электродинамики (6) для областей автономного блока (рис. 2), используя кусочно-неоднородную функцию заполнения полости автономного блока (прямоугольного параллелепипеда):

$$\begin{cases} \text{rot } \vec{H} = i\omega \tilde{\epsilon} \vec{E}; \\ \text{rot } \vec{E} = -i\omega \vec{M} - i\omega \mu_0 \vec{H}; \\ q \text{ rot rot } \vec{M} - q \text{ grad div } \vec{M} = \mu_0 \vec{H} - \mu_0 \tilde{\eta} \vec{M}, \end{cases} \quad (7)$$

где

$$\tilde{\epsilon} = \begin{cases} \epsilon_{\text{мн}}, & \text{в } V_{\text{мн}}, \\ \epsilon_{\text{зап}}, & \text{в } V_0 - V_{\text{мн}}, \end{cases} \quad \begin{cases} \vec{M} \neq 0, & \text{в } V_{\text{мн}}, \\ \vec{M} = 0, & \text{в } V_0 - V_{\text{мн}}. \end{cases}$$

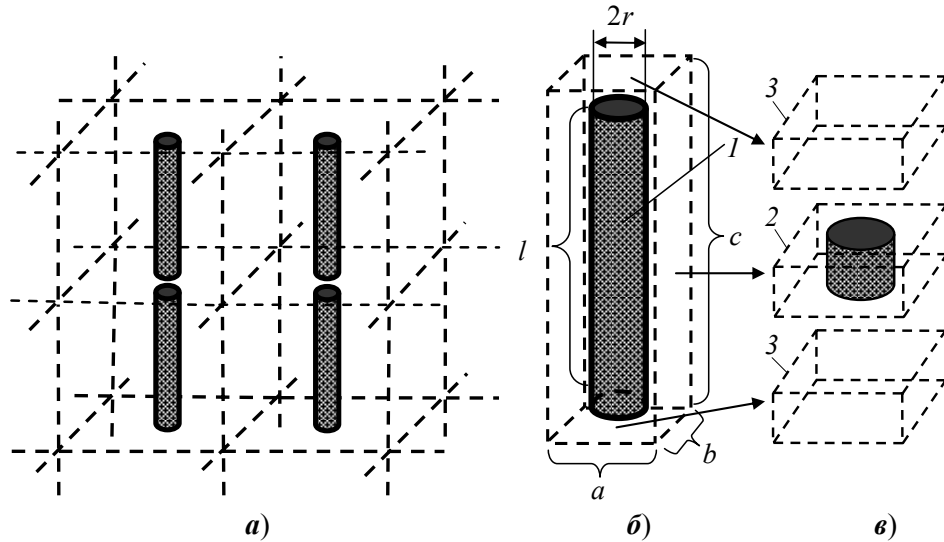


Рис. 1. Расчетная схема математической модели нанокompозита на основе магнитных нанопроволок: *a* – периодическая 3D-структура магнитного нанокompозита; *б* – ячейка периодической 3D-структуры (*l* – магнитная нанопроволока); *в* – декомпозиция ячейки 3D-структуры на автономные блоки (2, 3 – автономные блоки декомпозиции)

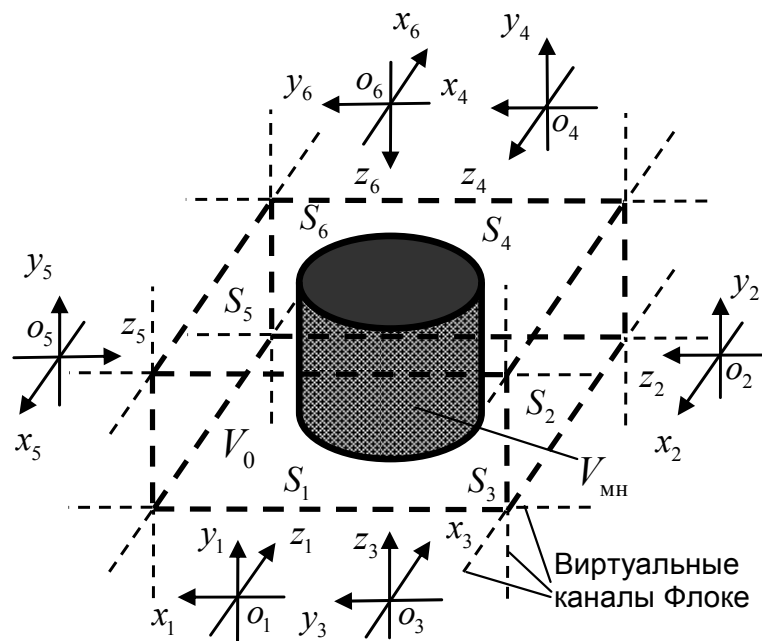


Рис. 2. Автономный блок в виде прямоугольного параллелепипеда с углеродной нанотрубкой и магнитной наносферой: V_0 – основная область автономного блока; $V_{\text{мн}}$ – область магнитной нанопроволоки; $o_\alpha x_\alpha y_\alpha z_\alpha$ ($\alpha = 1, 2, \dots, 6$) – локальные системы координат для сечений (граней) S_α

Получим для системы дифференциальных уравнений (7) интегральную проекционную модель. Основой получения интегральных проекционных моделей является лемма Лоренца и формула Остроградского – Гаусса. Кроме того, для получения интегральной проекционной модели необходимы вспомогательные краевые задачи на собственные значения [3]. Краевая задача на собственные значения (частоты) формулируется для прямоугольного резонатора с геометрическими размерами основной области автономного блока (область V_0 на рис. 2):

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{rot} \vec{H}_k &= i \omega_k \varepsilon_0 \vec{E}_k \\ \operatorname{rot} \vec{E}_k &= -i \omega_k \mu_0 \vec{H}_k \end{aligned} \right\} \text{ в области } V_0, \quad (8)$$

$$\left. \begin{aligned} \vec{E}_k(S_1) &= \vec{E}_k(S_4), \quad \vec{H}_k(S_1) = \vec{H}_k(S_4) \\ \vec{E}_k(S_2) &= \vec{E}_k(S_5), \quad \vec{H}_k(S_2) = \vec{H}_k(S_5) \\ \vec{E}_k(S_3) &= \vec{E}_k(S_6), \quad \vec{H}_k(S_3) = \vec{H}_k(S_6) \end{aligned} \right\} \text{ на гранях,}$$

где ε_0, μ_0 – диэлектрическая и магнитная постоянные, ω_k – собственные частоты резонатора; $\vec{E}_k, \vec{H}_k$ – собственные электрические и магнитные поля (функции) резонатора. Система собственных функций $\{\vec{E}_k, \vec{H}_k\}$ состоит из соленоидальной подсистемы $\{\vec{E}_k^c, \vec{H}_k^c\}$ и потенциальной подсистемы $\{\vec{E}_k^p, \vec{H}_k^p\}$ [2]. Индекс k определен на множестве индексов k' и k'' .

Соленоидальные функции $\vec{E}_k^c, \vec{H}_k^c$ краевой задачи на собственные значения (8) имеют следующий вид [4]:

– E -функции (поля):

$$\begin{aligned} \vec{E}_k^c &= N_{k'} \frac{1}{\chi^2} \frac{2\pi m'}{a} \frac{2\pi p'}{c} \exp\left(i\left(\frac{2\pi m'}{a}x + \frac{2\pi n'}{b}y + \frac{2\pi p'}{c}z\right)\right) \vec{i} + \\ &+ N_{k'} \frac{1}{\chi^2} \frac{2\pi n'}{b} \frac{2\pi p'}{c} \exp\left(i\left(\frac{2\pi m'}{a}x + \frac{2\pi n'}{b}y + \frac{2\pi p'}{c}z\right)\right) \vec{j} + \\ &+ N_{k'} \exp\left(i\left(\frac{2\pi m'}{a}x + \frac{2\pi n'}{b}y + \frac{2\pi p'}{c}z\right)\right) \vec{k}; \\ \vec{H}_k^c &= -N_{k'} \frac{\omega_k \varepsilon_0}{\chi^2} \frac{2\pi n'}{b} \exp\left(i\left(\frac{2\pi m'}{a}x + \frac{2\pi n'}{b}y + \frac{2\pi p'}{c}z\right)\right) \vec{i} + \\ &+ N_{k'} \frac{\omega_k \varepsilon_0}{\chi^2} \frac{2\pi m'}{a} \exp\left(i\left(\frac{2\pi m'}{a}x + \frac{2\pi n'}{b}y + \frac{2\pi p'}{c}z\right)\right) \vec{j}, \end{aligned} \quad (9)$$

где $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ – единичные орты прямоугольной декартовой системы координат;

$$\chi^2 = \chi_{m'n'}^2 = \left(\frac{2\pi m'}{a}\right)^2 + \left(\frac{2\pi n'}{b}\right)^2, N_{k'} = \frac{\chi}{\epsilon_0 \omega_{k'} \sqrt{\mu_0} \sqrt{abc}},$$

$$\omega_{k'} = \omega_{m'n'p'} = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} \sqrt{\left(\frac{2\pi m'}{a}\right)^2 + \left(\frac{2\pi n'}{b}\right)^2 + \left(\frac{2\pi p'}{c}\right)^2},$$

$$m' = 0, \pm 1, \pm 2, \dots; \quad n' = 0, \pm 1, \pm 2, \dots; \quad p' = 0, \pm 1, \pm 2, \dots;$$

– H -функции (поля):

$$\begin{aligned} \bar{H}_{k'}^c &= M_{k'} \frac{1}{\chi^2} \frac{2\pi m'}{a} \frac{2\pi p'}{c} \exp\left(i\left(\frac{2\pi m'}{a}x + \frac{2\pi n'}{b}y + \frac{2\pi p'}{c}z\right)\right) \vec{i} + \\ &+ M_{k'} \frac{1}{\chi^2} \frac{2\pi n'}{b} \frac{2\pi p'}{c} \exp\left(i\left(\frac{2\pi m'}{a}x + \frac{2\pi n'}{b}y + \frac{2\pi p'}{c}z\right)\right) \vec{j} + \\ &+ M_{k'} \exp\left(i\left(\frac{2\pi m'}{a}x + \frac{2\pi n'}{b}y + \frac{2\pi p'}{c}z\right)\right) \vec{k}; \\ \bar{E}_{k'}^c &= -M_{k'} \frac{\omega_{k'} \mu_0}{\chi^2} \frac{2\pi n'}{b} \exp\left(i\left(\frac{2\pi m'}{a}x + \frac{2\pi n'}{b}y + \frac{2\pi p'}{c}z\right)\right) \vec{i} + \\ &+ M_{k'} \frac{\omega_{k'} \mu_0}{\chi^2} \frac{2\pi m'}{a} \exp\left(i\left(\frac{2\pi m'}{a}x + \frac{2\pi n'}{b}y + \frac{2\pi p'}{c}z\right)\right) \vec{j}, \end{aligned} \quad (10)$$

где

$$\chi^2 = \chi_{m'n'}^2 = \left(\frac{2\pi m'}{a}\right)^2 + \left(\frac{2\pi n'}{b}\right)^2, \quad M_{k'} = \frac{\chi}{\mu_0 \omega_{k'} \sqrt{\epsilon_0} \sqrt{abc}},$$

$$\omega_{k'} = \omega_{m'n'p'} = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} \sqrt{\left(\frac{2\pi m'}{a}\right)^2 + \left(\frac{2\pi n'}{b}\right)^2 + \left(\frac{2\pi p'}{c}\right)^2},$$

$$m' = 0, \pm 1, \pm 2, \dots; \quad n' = 0, \pm 1, \pm 2, \dots; \quad p' = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Потенциальные функции $\bar{E}_{k''}^n, \bar{H}_{k''}^n$ краевой задачи на собственные значения (8) имеют следующий вид [3]:

$$\begin{aligned} \bar{E}_{k''}^n &= \frac{i}{\chi_{k''} \sqrt{\epsilon_0 abc}} \exp\left(i\left(\frac{2\pi m''}{a}x + \frac{2\pi n''}{b}y + \frac{2\pi p''}{c}z\right)\right) \left(\frac{2\pi m''}{a} \vec{i} + \frac{2\pi n''}{b} \vec{j} + \frac{2\pi p''}{c} \vec{k}\right), \\ \bar{H}_{k''}^n &= \frac{i}{\chi_{k''} \sqrt{\mu_0 abc}} \exp\left(i\left(\frac{2\pi m''}{a}x + \frac{2\pi n''}{b}y + \frac{2\pi p''}{c}z\right)\right) \times \\ &\times \left(\frac{2\pi m''}{a} \vec{i} + \frac{2\pi n''}{b} \vec{j} + \frac{2\pi p''}{c} \vec{k}\right), \end{aligned} \quad (11)$$

где $\chi_{k''} = \sqrt{\left(\frac{2\pi m''}{a}\right)^2 + \left(\frac{2\pi n''}{b}\right)^2 + \left(\frac{2\pi p''}{c}\right)^2}$.

Собственные функции резонатора (9)–(11) ортогональны и нормированы:

$$\mu_0 \int_{V_0} \vec{H}_k^* \cdot \vec{H}_n dV = \varepsilon_0 \int_{V_0} \vec{E}_k^* \cdot \vec{E}_n dV = \delta_{kn}. \quad (12)$$

Построим проекционную модель автономного блока (рис. 2). Запишем выражения для собственных электромагнитных волн виртуальных каналов Флоке автономного блока [5]:

$$\begin{aligned} \vec{E}_{k(\alpha)}^\pm &= \left(\vec{e}_{k(\alpha)} \pm \vec{e}_{k(\alpha)}^z \right) \exp(\pm i \Gamma_{k(\alpha)} z_\alpha); \\ \vec{H}_{k(\alpha)}^\pm &= \left(\pm \vec{h}_{k(\alpha)} \pm \vec{h}_{k(\alpha)}^z \right) \exp(\pm i \Gamma_{k(\alpha)} z_\alpha); \quad k=1, 2, \dots, \infty; \quad \alpha=1, 2, \dots, 6, \end{aligned} \quad (13)$$

где k – номера мод собственных волн каналов Флоке; $\vec{e}_{k(\alpha)}$, $\vec{h}_{k(\alpha)}$ – поперечные электрические и магнитные компоненты собственных волн; $\vec{e}_{k(\alpha)}^z$, $\vec{h}_{k(\alpha)}^z$ – продольные электрические и магнитные компоненты собственных волн; $\Gamma_{k(\alpha)}$ – постоянные распространения собственных волн.

Поперечные электрические и магнитные компоненты собственных волн каналов Флоке образуют полную систему ортогональных функций $\{\vec{e}_{k(\alpha)}, \vec{h}_{k(\alpha)}\}$ [4]. Любое поперечное электромагнитное поле на входных сечениях S_α автономного блока представляем по этим системам в ортогональные ряды Фурье:

$$\begin{cases} \vec{E}_\alpha = \sum_{k=1}^{\infty} a_{k(\alpha)} \vec{e}_{k(\alpha)}, \\ \vec{H}_\alpha = \sum_{k=1}^{\infty} b_{k(\alpha)} \vec{h}_{k(\alpha)}, \end{cases} \quad \alpha=1, 2, \dots, 6. \quad (14)$$

На каждом входном сечении S_α автономного блока касательное электромагнитное поле можно представить также и в виде суперпозиции прямых и обратных волн каналов Флоке [5]:

$$\begin{cases} \vec{E}_\alpha = \sum_{k=1}^{\infty} (c_{k(\alpha)}^+ + c_{k(\alpha)}^-) \vec{e}_{k(\alpha)}, \\ \vec{H}_\alpha = \sum_{k=1}^{\infty} (c_{k(\alpha)}^+ - c_{k(\alpha)}^-) \vec{h}_{k(\alpha)}, \end{cases} \quad \alpha=1, 2, \dots, 6, \quad (15)$$

где $c_{k(\alpha)}^+$, $c_{k(\alpha)}^-$ – амплитуды падающих и отраженных волн.

Из рядов Фурье (14) (15) и нормировки [5]

$$\int_{S_\alpha} (\vec{e}_{k(\alpha)} \times \vec{h}_{n(\alpha)}^*) \cdot d\vec{S}_\alpha = \begin{cases} 0, & k \neq n, \\ 1, & k = n \end{cases} \quad (16)$$

следуют следующие интегральные выражения:

$$a_{k(\alpha)} = \int_{S_\alpha} (\vec{E}_\alpha \times \vec{h}_{k(\alpha)}^*) \cdot d\vec{S}_\alpha; \quad (17)$$

$$b_{k(\alpha)} = \int_{S_\alpha} (\vec{e}_{k(\alpha)} \times \vec{H}_\alpha^*) \cdot d\vec{S}_\alpha; \quad (18)$$

$$\int_{S_\alpha} (\vec{E}_\alpha \times \vec{h}_{k(\alpha)}^*) \cdot d\vec{S}_\alpha + \int_{S_\alpha} (\vec{e}_{k(\alpha)} \times \vec{H}_\alpha^*) \cdot d\vec{S}_\alpha = 2c_{k(\alpha)}^+; \quad (19)$$

$$\int_{S_\alpha} (\vec{E}_\alpha \times \vec{h}_{k(\alpha)}^*) \cdot d\vec{S}_\alpha - \int_{S_\alpha} (\vec{e}_{k(\alpha)} \times \vec{H}_\alpha^*) \cdot d\vec{S}_\alpha = 2c_{k(\alpha)}^-. \quad (20)$$

Выражения (17)–(20) являются интегральными краевыми условиями на гранях автономного блока и известны в электродинамике [5] как условия неасимптотического излучения.

Запишем для системы уравнений электродинамики (7) проекционную интегральную модель. Для этого используются: краевая задача на собственные значения (8), тождество $\vec{b} \operatorname{rot} \vec{a} - \vec{a} \operatorname{rot} \vec{b} = \operatorname{rot}(\vec{a} \times \vec{b})$, формула Остроградского – Гаусса и условие неасимптотического излучения (18):

$$\left\{ \begin{aligned} & \sum_{\beta=1}^6 \int_{S_\beta} (\vec{E} \times \vec{H}_k^*) \cdot d\vec{S}_\beta = -i\omega_k \epsilon_0 \int_{V_0} \vec{E} \cdot \vec{E}_k^* dV - \\ & \quad - i\omega\mu_0 \int_{V_0} \vec{H} \cdot \vec{H}_k^* dV - i\omega \int_{V_{\text{MH}}} \vec{M} \cdot \vec{H}_k^* dV, \\ & \sum_{\beta=1}^6 \int_{S_\beta} (\vec{H} \times \vec{E}_k^*) \cdot d\vec{S}_\alpha = i\omega \int_{V_0} \vec{E} \cdot \vec{E}_k^* dV + i\omega_k \mu_0 \int_{V_0} \vec{H} \cdot \vec{H}_k^* dV, \\ & q \int_{V_{\text{MH}}} (\operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{M} - \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{M}) \cdot \vec{H}_k^* dV = \\ & \quad = \mu_0 \int_{V_{\text{MH}}} \vec{H} \cdot \vec{H}_k^* dV - \mu_0 \int_{V_{\text{MH}}} \vec{\eta} \vec{M} \cdot \vec{H}_k^* dV, \\ & b_{q(\alpha)} = \int_{S_\alpha} (\vec{e}_{q(\alpha)} \times \vec{H}_\alpha^*) \cdot d\vec{S}_\alpha, \quad k=1,2,\dots,N_0, \quad q=1,2,\dots,N_\alpha, \quad \alpha=1,2,\dots,6, \end{aligned} \right. \quad (21)$$

где S_β – поверхности граней прямоугольного параллелепипеда; намагничённость вне областей магнитных наночастиц равна нулю.

Построим численный метод для определения матрицы проводимости Y автономного блока, связывающей коэффициенты $a_{k(\alpha)}$ с коэффициентами $b_{k(\alpha)}$ рядов Фурье (14). Решение краевой задачи ищем в виде линейной комбинации по системам функций $\{\vec{E}_n\}$, $\{\vec{H}_n\}$ (собственные функции прямоугонного резонатора), $\{\vec{e}_{l(\beta)}\}$, $\{\vec{h}_{l(\beta)}\}$ (собственные функции каналов Флоке).

В области V_0 автономного блока

$$\vec{E} = \sum_{n=1}^{N_0} \tilde{a}_n \vec{E}_n, \quad \vec{H} = \sum_{n=1}^{N_0} \tilde{b}_n \vec{H}_n, \quad \vec{M} = \sum_{n=1}^{N_0} d_n \vec{H}_n, \quad (22)$$

где N_0 – количество базисных функций в области автономного блока V_0 .

На гранях S_β ($\beta = 1, 2, \dots, 6$) автономного блока

$$\vec{E}_\beta = \sum_{l=1}^{N_\beta} a_{l(\beta)} \vec{e}_{l(\beta)}, \quad \vec{H}_\beta = \sum_{l=1}^{N_\beta} b_{l(\beta)} \vec{h}_{l(\beta)}, \quad (23)$$

где N_β – количество базисных функций на гранях автономного блока S_β .

Подставляя (22) и (23) в (21), получаем следующую систему алгебраических уравнений:

$$\begin{aligned} & \sum_{n=1}^{N_0} (i\omega_k \delta_{kn}) \tilde{a}_n + \sum_{n=1}^{N_0} (i\omega \delta_{kn}) \tilde{b}_n + \sum_{n=1}^{N_0} \left(i\omega \int_{V_{MH}} \vec{H}_n \cdot \vec{H}_k^* dV \right) d_n = \\ & = - \sum_{\beta=1}^6 \sum_{l=1}^{N_\beta} \left(\int_{S_\beta} (\vec{e}_{l(\beta)} \times \vec{H}_k^*) \cdot d\vec{S}_\beta \right) a_{l(\beta)}, \\ & \sum_{n=1}^{N_0} \left(i\omega \int_{V_0} \tilde{\epsilon} \vec{E}_n \cdot \vec{E}_k^* dV \right) \tilde{a}_n + \sum_{n=1}^{N_0} \left(i\omega_k \delta_{kn} - \sum_{\beta=1}^6 \int_{S_\beta} (\vec{H}_n \times \vec{E}_k^*) \cdot d\vec{S}_\beta \right) \tilde{b}_n = 0, \\ & \sum_{n=1}^{N_0} \left(\mu_0 \int_{V_{MH}} \vec{H}_n \cdot \vec{H}_k^* dV \right) \tilde{b}_n - \\ & - \sum_{n=1}^{N_0} \left(q\lambda_n \int_{V_{MH}} \vec{H}_n \cdot \vec{H}_k^* dV + \mu_0 \int_{V_{MH}} \vec{H}_n \cdot \vec{H}_k^* dV \right) d_n = 0, \\ & \sum_{n=1}^{N_0} \left(\int_{S_\alpha} (\vec{e}_{q(\alpha)} \times \vec{H}_n^*) \cdot d\vec{S}_\alpha \right) \tilde{b}_n = b_{q(\alpha)}, \end{aligned} \quad (24)$$

где $\omega_k = \omega_{k'}$ для соленоидальных функций, $\omega_k = 0$ для потенциальных функций, $\lambda_k = \omega_{k'}$ для соленоидальных функций, $\lambda_k = \omega_{k'} \sqrt{\epsilon_0 \mu_0}$ для потенциальных функций; δ_{kn} – символ Кронекера.

Запишем систему линейных алгебраических уравнений (24) в матричной форме:

$$\begin{cases} \mathbf{A} \cdot \tilde{\mathbf{a}} + \mathbf{B} \cdot \tilde{\mathbf{b}} + \mathbf{C} \cdot \mathbf{d} = -\mathbf{L} \cdot \mathbf{a}, \\ \mathbf{D} \cdot \tilde{\mathbf{a}} + \mathbf{U} \cdot \tilde{\mathbf{b}} = 0, \\ \mathbf{F} \cdot \tilde{\mathbf{b}} - \mathbf{G} \cdot \mathbf{d} = 0, \\ \mathbf{W} \cdot \tilde{\mathbf{b}} = \mathbf{b}, \end{cases} \quad (25)$$

где $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D}, \mathbf{U}, \mathbf{F}, \mathbf{G}, \mathbf{W}, \mathbf{L}$ – матрицы с элементами:

$$\begin{aligned} A_{kn} &= i \omega_k \delta_{kn}, \\ B_{kn} &= i \omega \delta_{kn}, \\ C_{kn} &= \begin{pmatrix} i \omega \int_{V_{\text{MH}}} \vec{H}_{n'}^c \cdot \vec{H}_k^{c*} dV & i \omega \int_{V_{\text{MH}}} \vec{H}_{n'}^n \cdot \vec{H}_k^{c*} dV \\ i \omega \int_{V_{\text{MH}}} \vec{H}_{n'}^c \cdot \vec{H}_k^{n*} dV & i \omega \int_{V_{\text{MH}}} \vec{H}_{n'}^n \cdot \vec{H}_k^{n*} dV \end{pmatrix}, \\ D_{kn} &= \begin{pmatrix} i \omega \int_{V_0} \tilde{\epsilon} \vec{E}_{n'}^c \cdot \vec{E}_k^{c*} dV & i \omega \int_{V_0} \tilde{\epsilon} \vec{E}_{n'}^n \cdot \vec{E}_k^{c*} dV \\ i \omega \int_{V_0} \tilde{\epsilon} \vec{E}_{n'}^c \cdot \vec{E}_k^{n*} dV & i \omega \int_{V_0} \tilde{\epsilon} \vec{E}_{n'}^n \cdot \vec{E}_k^{n*} dV \end{pmatrix}, \\ U_{kn} &= \begin{pmatrix} i \omega_{k'} \delta_{k'n'} - \sum_{\beta=1}^6 \int_{S_\beta} (\vec{H}_{n'}^c \times \vec{E}_k^{c*}) \cdot dS_\beta & i \omega_{k'} \delta_{k'n''} - \sum_{\beta=1}^6 \int_{S_\beta} (\vec{H}_{n'}^n \times \vec{E}_k^{c*}) \cdot dS_\beta \\ i \omega_{k''} \delta_{k''n'} - \sum_{\beta=1}^6 \int_{S_\beta} (\vec{H}_{n'}^c \times \vec{E}_k^{n*}) \cdot dS_\beta & i \omega_k \delta_{kn} - \sum_{\beta=1}^6 \int_{S_\beta} (\vec{H}_{n'}^n \times \vec{E}_k^{n*}) \cdot dS_\beta \end{pmatrix}, \\ F_{kn} &= \begin{pmatrix} \mu_0 \int_{V_{\text{MH}}} \vec{H}_{n'}^c \cdot \vec{H}_k^{c*} dV & \mu_0 \int_{V_{\text{MH}}} \vec{H}_{n'}^n \cdot \vec{H}_k^{c*} dV \\ \mu_0 \int_{V_{\text{MH}}} \vec{H}_{n'}^c \cdot \vec{H}_k^{n*} dV & \mu_0 \int_{V_{\text{MH}}} \vec{H}_{n'}^n \cdot \vec{H}_k^{n*} dV \end{pmatrix}, \\ W_{q(\alpha)n} &= \begin{pmatrix} \int_{S_\alpha} (\vec{e}_{q(\alpha)} \times \vec{H}_{n'}^{c*}) \cdot dS_\alpha & \int_{S_\alpha} (\vec{e}_{q(\alpha)} \times \vec{H}_{n'}^{n*}) \cdot dS_\alpha \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

$$G_{kn} = \begin{pmatrix} q\lambda_n \int_{V_{MH}} \vec{H}_n^c \cdot \vec{H}_k^{c*} dV + & q\lambda_n \int_{V_{MH}} \vec{H}_n^{\pi} \cdot \vec{H}_k^{c*} dV + \\ + \mu_0 \int_{V_{MH}} \tilde{\chi}^{-1} \vec{H}_n^c \cdot \vec{H}_k^{c*} dV & + \mu_0 \int_{V_{MH}} \tilde{\eta} \vec{H}_n^{\pi} \cdot \vec{H}_k^{c*} dV \\ q\lambda_n \int_{V_{MH}} \vec{H}_n^c \cdot \vec{H}_k^{\pi*} dV + & q\lambda_n \int_{V_{MH}} \vec{H}_n^c \cdot \vec{H}_k^{\pi*} dV + \\ + \mu_0 \int_{V_{MH}} \tilde{\chi}^{-1} \vec{H}_n^c \cdot \vec{H}_k^{\pi*} dV & + \mu_0 \int_{V_{MH}} \tilde{\eta} \vec{H}_n^c \cdot \vec{H}_k^{\pi*} dV \end{pmatrix},$$

$$L_{kl(\beta)} = \begin{pmatrix} \int_{S_{\beta}} (\vec{e}_{l(\beta)} \times \vec{H}_k^{c*}) \cdot dS_{\beta} \\ \int_{S_{\beta}} (\vec{e}_{l(\beta)} \times \vec{H}_k^{\pi*}) \cdot dS_{\beta} \end{pmatrix}, \quad k=1,2,\dots,N_0, \quad q=1,2,\dots,N_{\alpha}, \quad \alpha=1,2,\dots,6.$$

Компонентами векторов $\tilde{\mathbf{a}}, \tilde{\mathbf{b}}, \mathbf{d}, \mathbf{a}, \mathbf{b}$ являются коэффициенты рядов Фурье (22) и (23), соответственно равные $\{\tilde{a}_n\}, \{\tilde{b}_n\}, \{d_n\}, \{a_{l(\beta)}\}, \{b_{l(\beta)}\}$.

Исключая векторы $\tilde{\mathbf{a}}, \tilde{\mathbf{b}}, \mathbf{d}$ из системы линейных алгебраических уравнений (25), получаем

$$\mathbf{b} = \mathbf{W} \cdot (\mathbf{A} \cdot \mathbf{D}^{-1} \cdot \mathbf{U} - \mathbf{C} \cdot \mathbf{G}^{-1} \cdot \mathbf{F} - \mathbf{B})^{-1} \cdot \mathbf{L} \cdot \mathbf{a}, \quad (26)$$

отсюда (26) следует матрица проводимости автономного блока:

$$\mathbf{Y} = \mathbf{W} \cdot (\mathbf{A} \cdot \mathbf{D}^{-1} \cdot \mathbf{U} - \mathbf{C} \cdot \mathbf{G}^{-1} \cdot \mathbf{F} - \mathbf{B})^{-1} \cdot \mathbf{L}. \quad (27)$$

Для автономного блока без магнитных частиц матрица проводимости определяется из (27) при $\mathbf{C} = 0, \mathbf{G} = 0, \mathbf{F} = 0$:

$$\mathbf{Y} = \mathbf{W} \cdot (\mathbf{A} \cdot \mathbf{D}^{-1} \cdot \mathbf{U} - \mathbf{B})^{-1} \cdot \mathbf{L}. \quad (28)$$

Если геометрические размеры автономного блока значительно меньше длины волны, то в виртуальных каналах Флоке достаточно использовать две взаимно ортогональные ТЕМ-волны.

Заключение

Автономный блок в виде прямоугольного параллелепипеда с включением в виде магнитной нанопроволоки является универсальным базовым элементом для решения прикладных задач электродинамики и техники СВЧ. Автономный блок может использоваться для определения постоянных распространения волн в трехмерных периодических структурах из магнитных нанопроволок (рис. 1). Ячейка периодической структуры моделируется авто-

номным блоком. Накладывая на грани параллелепипеда краевые условия, вытекающие из теоремы Флоке, получаем характеристическое уравнение относительно постоянных распространения волн [4]. Из решения характеристического уравнения определяются основные типы волны, которые могут использоваться для определения эффективных значений магнитной и диэлектрической проницаемостей магнитного нанокompозита [4]. Постоянные распространения волн левой и правой поляризации, обыкновенной и необыкновенной волн в бесконечной сплошной гиромангнитной среде должны совпадать с аналогичными значениями постоянных распространения волн в трехмерной периодической структуре магнитного нанокompозита. Это приводит к системе уравнений, из которой определяются компоненты эффективного тензора магнитной проницаемости и скаляр диэлектрической проницаемости.

Автономный блок может непосредственно использоваться как базовый элемент при построении математических моделей устройств СВЧ с магнитными нанокompозитами (циркуляторы, перестраиваемые фильтры и т.д.) [6]. Области вкладышей, подложек устройств СВЧ из магнитных нанокompозитов дополнительно разбиваются на автономные блоки (рис. 2). Математическая модель в этом случае является моделью высокого уровня и позволяет учитывать влияние поля обменного взаимодействия на предельные характеристики устройств СВЧ.

Список литературы

1. **Kim, K. H.** RF Noise Suppression Using Carbon-Coated Permalloy Nanorod Arrays / K. H. Kim, H. Orikasa, T. Kyotani, and M. Yamaguchi // *Transactions on Magnetics*. – 2005 – Vol. 41, № 10. – P. 4075–4077.
2. **Гуревич, А. Г.** Магнитные колебания и волны / А. Г. Гуревич, Г. А. Мелков. – М. : Наука, 1994. – 407 с.
3. **Никольский, В. В.** Проекционные методы в электродинамике / В. В. Никольский // *Сборник научно-методических статей по прикладной электродинамике*. – М. : Высшая школа, 1977. – С. 4–23.
4. **Голованов, О. А.** Метод автономных блоков с магнитными нановключениями и каналами Флоке для математического моделирования магнитных наноструктур с учетом обмена и граничных условий / О. А. Голованов, Г. С. Макеева // *Радиотехника и электроника*. – 2009. – Т. 54, № 11. – С. 1421–1428.
5. **Голованов, О. А.** Автономные блоки с виртуальными каналами Флоке и их применение для решения прикладных задач электродинамики / О. А. Голованов // *Радиотехника и электроника*. – 2006. – Т. 51, № 12. – С. 1423–1430.
6. **Голованов, О. А.** Электродинамический расчет S-параметров матрицы рассеяния 3D-магнитного нанокompозита в волноводе / О. А. Голованов, Г. С. Макеева, М. А. Чиркина, А. С. Николенко // *Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки*. – 2011. – № 4 (20). – С. 160–167.

References

1. Kim K. H., Orikasa H., Kyotani T. and Yamaguchi M. *Transactions on Magnetics*. 2005, vol. 41, no. 10, pp. 4075–4077.
2. Gurevich A. G., Melkov G. A. *Magnitnye kolebaniya i volny* [Magnetic oscillations and waves]. Moscow: Nauka, 1994, 407 p.
3. Nikol'skiy V. V. *Sbornik nauchno-metodicheskikh statey po prikladnoy elektrodinamike* [Collected scientific and methodological articles on applied electrodynamics]. Moscow: Vysshaya shkola, 1977, pp. 4–23.

4. Golovanov O. A., Makeeva G. S. *Radiotekhnika i elektronika* [Radio engineering and electronics]. 2009, vol. 54, no. 11, pp. 1421–1428.
5. Golovanov O. A. *Radiotekhnika i elektronika* [Radio engineering and electronics]. 2006, vol. 51, no. 12, pp. 1423–1430.
6. Golovanov O. A., Makeeva G. S., Chirkina M. A., Nikolenko A. S. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Povolzhskiy region. Fiziko-matematicheskie nauki* [University proceedings. Volga region. Physics and mathematics sciences]. 2011, no. 4 (20), pp. 160–167.

Николенко Антон Станиславович
соискатель, заместитель командира
батареи, Пензенский филиал Военной
академии материально-технического
обеспечения (Россия, г. Пенза-5)

E-mail: nikolants@mail.ru

Nikolenko Anton Stanislavovich
Applicant, deputy battery commander,
Penza branch of the Military Academy
of Maintenance Supplies (Penza-5, Russia)

УДК 535.32

Николенко, А. С.

Математическая модель распространения электромагнитных волн в нанокompозитах на основе магнитных нанопроволок / А. С. Николенко // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. – 2013. – № 4 (28). – С. 147–161.